СЛАБО НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ИМЕЮЩИХ ЦЕНТР СИММЕТРИИ, К ВОЗМУЩЕНИЯМ С БОЛЬШИМИ МАСШТАБАМИ

В.А.Желиговский

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН

Лаборатория общей аэродинамики, Институт механики МГУ

E-mail: vlad@mitp.ru

Рассмотрена задача о слабо нелинейной устойчивости к возмущениям с большими масштабами трехмерных магнитогидродинамических систем, имеющих симметрию относительно центра. Предполагается, что в исследуемом МГД состоянии отсутствуют большие пространственно-временны́е масштабы, и что эти состояния устойчивы к возмущениям с таким же малым пространственным масштабом, как в исследуемом состоянии. Выведенные с помощью асимптотических методов уравнения для средних полей возмущений обобщают уравнения Навье-Стокса и магнитной индукции. В них появляются оператор комбинированной вихревой диффузии, вообще говоря, анизотропный и не обязательно отрицательно определенный, и дополнительные квадратичные члены, аналогичные адективным. Предложен метод экономичного вычисления коэффициентов вихревой диффузии и адвекции в уравнениях для средних полей.

1. Введение. Настоящая статья является непосредственным продолжением работы Желиговского [2003], где была рассмотрена задача о линейной устойчивости магнитогидродинамических (МГД) стационарных состояний. Предполагается, что характерный пространственный масштаб рассматриваемого стационарного состояния существенно меньше характерного масштаба возмущений. Тогда отношение этих масштабов ε – малый параметр, и с помощью асимптотических методов в указанной работе было построено решение соответствующей задачи на собственные значения в виде степенных рядов по этому параметру. Было показано, что главные члены разложений мод МГД возмущений центрально-симметричных стационарных состояний и их инкрементов роста являются соответственно собственными векторами и собственными значениями так называемого оператора комбинированной вихревой (турбулентной) диффузии. Это оператор в частных производных второго порядка, вообще говоря, анизотропный и не обязательно знакоопределенный. Если он имеет положительные собственные значения, говорят о явлении отрицательной диффузии. (Отрицательную диффузию в кинематическом динамо исследовали Zheligovsky и др. [2001], Zheligovsky и Podvigina [2003] и Zheligovsky [2005], в конвекции Рэлея-Бенара в присутствии магнитного поля – Baptista и др. [2004].)

В настоящей работе рассмотрена дальнейшая эволюция возмущения в слабо нелинейном режиме. МГД состояние $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$, нелинейная устойчивость которого исследуется, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}) + (\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H} - \nabla P + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{H} + \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{H}) + \mathbf{J}, \tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{H} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ – скорость потока проводящей жидкости, $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ – магнитное поле, $P(\mathbf{x},t)$ – давление, ν и η – коэффициенты кинематической и магнитной молекулярной диффузии, соответственно, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ – объемная сила, $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ отвечает наличию в системе распределения наложенных внешних токов. Предположение о стационарности полей $\mathbf{V},\mathbf{H},P$ не делается.

Для системы в слабо нелинейном режиме считаем, что амплитуда возмущения порядка ε. Возмущенное состояние $\mathbf{V}+\varepsilon\mathbf{v}$, $\mathbf{H}+\varepsilon\mathbf{h}, P+\varepsilon p$ также удовлетворяет системе (1), откуда профили возмущений $\mathbf{v},\mathbf{h},p$ (в дальнейшем эти поля будем называть просто возмущениями) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{V}) + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{h})\times\mathbf{H} + (\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{h}$$

$$+\varepsilon(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{h})\times\mathbf{h}) - \nabla p, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{h} + \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{h}) + \varepsilon\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{h}), \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{2.3}$$

К системе уравнений (2) применяем методы теории осреднения уравнений в частных производных [Bensoussan и др., 1978; Oleinik и др., 1992; Cioranescu и Donato, 1999]. Вводим быстрые пространственные $\mathbf{x}$ и временну́ю t переменные и соответствующие медленные переменные $\mathbf{X}=\varepsilon\mathbf{x}, T=\varepsilon^2 t$ и представляем возмущение в виде формальных степенных рядов по ε. Последовательно рассматриваем осредненную по быстрым переменным и осциллирующую части полученных уравнений при каждой степени ε^n. Эта процедура позволяет вывести (как условие разрешимости уравнений в быстрых переменных при $n=2$) замкнутые нелинейные уравнения в медленных переменных для усредненного главного члена разложения возмущения. В терминологии обзора Newell и др. [1993], эти уравнения (в дальнейшем будем называть их уравнениями средних полей) описывают медленно модулированные конфигурации течений ("order parameter equations for slowly modulated patterns"). Они обобщают уравнения Навье-Стокса (1.1) и магнитной индукции (1.2). Вместо операторов Лапласа в них появляется оператор комбинированной вихревой диффузии, как и в линейной задаче. (Таким образом, если имеет место эффект отрицательной диффузии, то уравнения средних полей перестают быть параболическими.) Кроме того, в них присутствуют дополнительные квадратичные члены, аналогичные адвективным. Тензоры вихревой диффузии и вихревой адвекции определяются через решения вспомогательных эллиптических (для стационарных конвективных состояний) или параболических задач в быстрых переменных.

Уравнения средних полей для двумерных гидродинамических систем в отсутствие магнитного поля рассматривали в терминах функции тока Gama и др. [1994].

2. Предположения об исследуемом МГД состоянии $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$. В упомянутых выше статьях предполагалась периодичность полей $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$ по быстрым пространственным переменным. Это условие избыточно, и в настоящей работе оно не ставится. Считаем, что поля $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$, определяющие исходное МГД состояние, устойчивость которого исследуется, гладки и глобально ограничены, корректны все пространственно-временны́е усреднения, проводимые в процессе вывода уравнений средних полей, и имеют решение т.н. вспомогательные задачи, сформулированные ниже. Как легко видеть, первые два условия выполнены, если исходное состояние периодично по пространству и стационарно или периодично по времени, или если оно квазипериодично по пространству и времени, и энергетический спектр достаточно быстро затухает. (Поле f считается квазипериодичным по скалярной переменной x, если $f(x) = \hat{f}(\alpha_1 x, \dots, \alpha_m x)$, $\hat{f}$ периодично по каждой своей переменной с одним и тем же периодом, и все отношения констант $\alpha_{n_1}/\alpha_{n_2}$ при $n_1 \neq n_2$ иррациональны.) Имеется в виду усреднение по быстрым переменным:

$$\langle\!\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) \rangle\!\rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\tau \ell^3} \int_0^\tau \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T)\, d\mathbf{x}\, dt$$

– средняя, а $\{\mathbf{f}\} \equiv \mathbf{f} - \langle\!\langle \mathbf{f} \rangle\!\rangle$ – осциллирующая части поля $\mathbf{f}$.

Обозначим

$$\langle f \rangle \equiv \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell^3} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(\mathbf{x}, \dots)\, d\mathbf{x}$$

– пространственное (по быстрым переменным) среднее f. Из центральной симметричности исходного МГД состояния:

$$\mathbf{V}(-\mathbf{x}, t) = -\mathbf{V}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{H}(-\mathbf{x}, t) = -\mathbf{H}(\mathbf{x}, t); \quad P(-\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)$$

(считаем, что начало координат расположено в центре, относительно которого симметрично МГД состояние) следует, что пространственные и, следовательно, пространственно-временны́е средние этих полей равны нулю.

Предполагаем, что исходные состояния устойчивы к возмущениям с малым пространственным масштабом. Операторы линеаризации исходных уравнений (2) в окрестности исследуемого МГД состояния имеют вид

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{w}, \mathbf{g}, q) \equiv -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w} + \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V})$$

$$+(\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{g} + (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{H} - \nabla_{\mathbf{x}} q,$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{w}, \mathbf{g}) \equiv -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{g} + \nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{g} + \mathbf{w} \times \mathbf{H})$$

Пусть поля $\mathbf{w}, \mathbf{g}$ и q глобально ограничены вместе с их производными. В силу (1.3) и поскольку $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ принадлежат этому классу,

$$\langle \mathcal{L}^v(\mathbf{w},\mathbf{g},q)\rangle = -\frac{\partial\langle\mathbf{w}\rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{V}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{H}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{g}\rangle; \tag{3.1}$$

$$\langle \mathcal{L}^h(\mathbf{w},\mathbf{g})\rangle = -\frac{\partial\langle\mathbf{g}\rangle}{\partial t} \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\!\langle \mathcal{L}^v(\mathbf{w},\mathbf{g},q)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{V}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{H}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{g}\rangle\!\rangle; \quad \langle\!\langle \mathcal{L}^h(\mathbf{w},\mathbf{g})\rangle\!\rangle = 0. \tag{4}$$

Из (4) следует, что условия

$$\langle\!\langle \mathbf{f}^v(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{f}^h(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle = 0 \tag{5}$$

необходимы для существования решений системы уравнений

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{w},\mathbf{g},q) = \mathbf{f}^v, \quad \mathcal{L}^h(\mathbf{w},\mathbf{g}) = \mathbf{f}^h, \tag{6.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{g} = 0 \tag{6.2}$$

из рассматриваемого класса. Вследствие (3) пространственное среднее решений системы

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{w},\mathbf{g},q) = 0, \quad \mathcal{L}^h(\mathbf{w},\mathbf{g}) = 0, \tag{7.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{g} = 0 \tag{7.2}$$

из этого класса функций сохраняется во времени, поэтому линейная устойчивость исходного МГД состояния не асимптотическая. Будем считать, что всякое решение (7) из указанного класса функций с нулевым пространственным средним экспоненциально затухает во времени.

В дальнейшем предполагаем, что для произвольных глобально ограниченных вместе с производными гладких соленоидальных полей $\mathbf{f}^v(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{f}^h(\mathbf{x},t)$ с нулевым средним (6) имеет при заданных начальных условиях единственное решение $\mathbf{w},\mathbf{g},q$ в указанном пространстве. Это условие выполнено, например, для пространственно-периодических стационарных или периодических по времени устойчивых к короткомасштабным (не зависящим от медленных переменных) возмущениям состояний МГД систем общего положения (малое возмущение полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{J}$ в системах, где оно не выполнено, приводит либо к неустойчивости, либо к его выполнению). Решение (6) может быть построено, как решение параболического уравнения (однако поскольку область, которую занимает объем жидкости, не компактна, нельзя гарантировать, что оно будет глобально ограничено вместе с производными). Его единственность при данных начальных условиях следует из сделанного выше предположения о характере линейной устойчивости исходного МГД состояния.

3. Формальные асимптотические разложения. Решение задачи (2) ищем в виде степенных рядов

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{v}_n(\mathbf{x},t,\mathbf{X},T)\varepsilon^n, \qquad \mathbf{h} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{h}_n(\mathbf{x},t,\mathbf{X},T)\varepsilon^n, \tag{8}$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\mathbf{x},t,\mathbf{X},T)\varepsilon^n. \tag{9}$$

Считаем, что в начальный момент времени все члены рядов (8) заданы.

Приравняем нулю коэффициенты рядов по степеням ε, полученных подстановкой рядов (8) в (2.3). Выделяя среднюю и осциллирующую часть полученных уравнений, находим

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \langle\!\langle \mathbf{v}_n \rangle\!\rangle = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \langle\!\langle \mathbf{h}_n \rangle\!\rangle = 0, \tag{10.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \{\mathbf{v}_n\} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \{\mathbf{v}_{n-1}\} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \{\mathbf{h}_n\} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \{\mathbf{h}_{n-1}\} = 0 \tag{10.2}$$

при всех $n \geq 0$. Здесь и далее в дифференциальных операторах с индексами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ дифференцирование производится по быстрым и медленным пространственным переменным, соответственно (все члены рядов с индексом $n < 0$ по определению равны 0).

Подставив (8) и (9) в уравнения (2.1) и (2.2), преобразуем последние к виду равенств рядов по степеням ε. Приравнивая коэффициенты этих рядов, получаем рекуррентную систему уравнений, которую последовательно решаем совместно с условиями (10), выделяя среднюю и осциллирующую часть каждого уравнения.

4. Уравнения порядка ε^0. Из главных членов рядов (2.1) и (2.2) получаем уравнения

$$\mathcal{L}^v(\{\mathbf{v}_0\}, \{\mathbf{h}_0\}, \{p_0\}) + \langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}) \times \langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle = 0, \tag{11.1}$$

$$\mathcal{L}^h(\{\mathbf{v}_0\}, \{\mathbf{h}_0\}) + (\langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V} - (\langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{H} = 0. \tag{11.2}$$

Поскольку средние $\langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle$ и $\langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle$ не зависят от быстрых переменных, а в операторах $\mathcal{L}^v$ и $\mathcal{L}^h$ дифференцирование проводится только по быстрым переменным, в силу линейности (11) эти уравнения имеют решения следующей структуры:

$$\{\mathbf{v}_0\} = \boldsymbol{\xi}_0^v + \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{S}_k^{v,v} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,v} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle), \tag{12.1}$$

$$\{\mathbf{h}_0\} = \boldsymbol{\xi}_0^h + \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{S}_k^{v,h} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,h} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle), \tag{12.2}$$

$$\{p_0\} = \xi_0^p + \sum_{k=1}^{3} (S_k^{v,p} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle + S_k^{h,p} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle), \tag{12.3}$$

где функции $\mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot}(\mathbf{x}, t)$ являются решениями *вспомогательных задач первого типа*

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{S}_k^{v,v}, \mathbf{S}_k^{v,h}, S_k^{v,p}) = -\mathbf{e}_k \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}), \tag{13.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{v,v} = 0, \tag{13.2}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{S}_k^{v,v}, \mathbf{S}_k^{v,h}) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_k} \tag{13.3}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{v,h} = 0; \tag{13.4}$$

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{S}_k^{h,v}, \mathbf{S}_k^{h,h}, S_k^{h,p}) = \mathbf{e}_k \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}), \tag{14.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{h,v} = 0, \tag{14.2}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{S}_k^{h,v}, \mathbf{S}_k^{h,h}) = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_k}, \tag{14.3}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{h,h} = 0, \tag{14.4}$$

а $\boldsymbol{\xi}_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T)$ удовлетворяют

$$\mathcal{L}^v(\boldsymbol{\xi}_0^v, \boldsymbol{\xi}_0^h, \xi_0^p) = \mathcal{L}^h(\boldsymbol{\xi}_0^v, \boldsymbol{\xi}_0^h) = 0, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}_0^v = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}_0^h = 0, \quad \langle \boldsymbol{\xi}_0 \rangle = 0. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{e}_k$ – единичный вектор вдоль оси координат x_k, верхний индекс k нумерует компоненты вектора:

$$\langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{3} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle \mathbf{e}_k, \qquad \langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{3} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle \mathbf{e}_k.$$

Условия (13.2), (13.4), (14.2) и (14.4) необходимы для выполнения (10.2) при $n = 0$.

В качестве начальных условий для задач (13) и (14) выберем некоторые глобально ограниченные вместе с производными гладкие соленоидальные поля, антисимметричные относительно центра, с нулевым пространственным средним. Тогда (13) и (14) имеют единственные решения согласно предположению о разрешимости задач (6) (условие разрешимости (5) для них выполнено в силу глобальной ограниченности полей $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$). Взяв дивергенцию уравнений (13.3) и (14.3), находим, что для выполнения (13.4) и (14.4) при $t > 0$ необходимо и достаточно потребовать соленоидальность $\mathbf{S}_k^{\cdot,h}$ при $t = 0$. Пространственные средние правых частей уравнений (13.1), (13.3), (14.1) и (14.3) равны нулю, поэтому требование $\langle \mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot} \rangle = 0$ при $t = 0$ влечет тогда $\langle\!\langle \mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot} \rangle\!\rangle = 0$ в силу (3). Аналогично, выполнение условий $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}_0^h = 0$ и $\langle \boldsymbol{\xi}_0 \rangle = 0$ достаточно требовать только при $t = 0$. Вследствие центральной симметричности исходного МГД состояния пространства центрально-симметричных и центрально-антисимметричных полей инвариантны для оператора $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^v, \mathcal{L}^h)$, поэтому решения $\mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot}$ соответствуют центрально-антисимметричным состояниям:

$$\mathbf{S}_k^{\cdot,v}(-\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_k^{\cdot,v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{S}_k^{\cdot,h}(-\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_k^{\cdot,h}(\mathbf{x}, t),$$

$$S_k^{\cdot,p}(-\mathbf{x}, t) = -S_k^{\cdot,p}(\mathbf{x}, t).$$

Начальные условия для задачи (15) выбираем из условий

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\xi}_0^v + \sum_{k=1}^{3} \left(\mathbf{S}_k^{v,v} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,v} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle \right) + \langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle, \tag{16.1}$$

$$\mathbf{h}_0 = \boldsymbol{\xi}_0^h + \sum_{k=1}^{3} \left(\mathbf{S}_k^{v,h} \langle\!\langle \mathbf{v}_0^k \rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,h} \langle\!\langle \mathbf{h}_0^k \rangle\!\rangle \right) + \langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle \tag{16.2}$$

при $t = 0$. Усредняя (16) по быстрой пространственной переменной, находим

$$\langle\!\langle \mathbf{v}_0 \rangle\!\rangle|_{T=0} = \langle \mathbf{v}_0 \rangle|_{t=0}, \quad \langle\!\langle \mathbf{h}_0 \rangle\!\rangle|_{T=0} = \langle \mathbf{h}_0 \rangle|_{t=0},$$

а из осциллирующих по быстрой пространственной переменной части условий (16) находим начальные условия для задачи (15). Изменение начальных условий для $\mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot}$ в рассматриваемом классе начальных условий компенсируется соответствующим изменением начальных условий для $\boldsymbol{\xi}_0^{\cdot}$, однако, как будет показано ниже, эта неоднозначность не влияет на вид уравнений для средних полей, поскольку эти изменения $\mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot}$ и $\boldsymbol{\xi}_0$ экспоненциально затухают во времени (т.к. они являются

решениями задачи (7) с нулевыми пространственными средними). В случае, если исходное МГД состояние стационарно или периодично по быстрому времени, для удобства вычисления пространственно-временны́х средних естественно потребовать, чтобы функции $\mathbf{S}_k^{\cdot,\cdot}$ были, соответственно, стационарными или периодичными по времени решениями задач (13) и (14). Существование таких стационарных решений при рассматриваемых условиях доказано Желиговским [2003] ((13) и (14) сводятся тогда к первой вспомогательной задаче, рассмотренной в указанной статье); периодический по времени случай рассматривается аналогично (см. Zheligovsky и Podvigina [2003]). Тогда $\boldsymbol{\xi}_0$ имеет смысл затухающих переходных процессов, приводящих к установившемуся (в быстром времени) режиму.

5. Уравнения порядка ε^1. Уравнения, полученные из членов рядов (2.1) и (2.2) порядка ε, имеют вид

$$\mathcal{L}^v(\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{h}_1\},\{p_1\}) + \langle\!\langle \mathbf{v}_1\rangle\!\rangle \times (\nabla_\mathbf{x}\times\mathbf{V}) + (\nabla_\mathbf{x}\times\mathbf{H})\times\langle\!\langle \mathbf{h}_1\rangle\!\rangle$$

$$+2\nu(\nabla_\mathbf{x}\cdot\nabla_\mathbf{X})\{\mathbf{v}_0\} + \mathbf{V}\times(\nabla_\mathbf{X}\times\mathbf{v}_0) + (\nabla_\mathbf{X}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{H}$$

$$+\mathbf{v}_0\times(\nabla_\mathbf{x}\times\{\mathbf{v}_0\}) + (\nabla_\mathbf{x}\times\{\mathbf{h}_0\})\times\mathbf{h}_0 - \nabla_\mathbf{X}p_0 = 0, \tag{17.1}$$

$$\mathcal{L}^h(\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{h}_1\}) + (\langle\!\langle \mathbf{h}_1\rangle\!\rangle\cdot\nabla_\mathbf{x})\mathbf{V} - (\langle\!\langle \mathbf{v}_1\rangle\!\rangle\cdot\nabla_\mathbf{x})\mathbf{H} + 2\eta(\nabla_\mathbf{x}\cdot\nabla_\mathbf{X})\{\mathbf{h}_0\}$$

$$+\nabla_\mathbf{X}\times(\mathbf{v}_0\times\mathbf{H}+\mathbf{V}\times\mathbf{h}_0) + \nabla_\mathbf{x}\times(\mathbf{v}_0\times\mathbf{h}_0) = 0 \tag{17.2}$$

(здесь использованы соотношения (10) при $n=1$). В силу линейности этих уравнений они имеют решения следующей структуры:

$$\{\mathbf{v}_1\} = \boldsymbol{\xi}_1^v + \sum_{k=1}^3\left(\mathbf{S}_k^{v,v}\langle\!\langle \mathbf{v}_1^k\rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,v}\langle\!\langle \mathbf{h}_1^k\rangle\!\rangle + \sum_{m=1}^3\left(\mathbf{G}_{m,k}^{v,v}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,v}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathbf{Q}_{m,k}^{vv,v}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{v}_0^m\rangle\!\rangle + \mathbf{Q}_{m,k}^{vh,v}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle + \mathbf{Q}_{m,k}^{hh,v}\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle\right)\right), \tag{18.1}$$

$$\{\mathbf{h}_1\} = \boldsymbol{\xi}_1^h + \sum_{k=1}^3\left(\mathbf{S}_k^{v,h}\langle\!\langle \mathbf{v}_1^k\rangle\!\rangle + \mathbf{S}_k^{h,h}\langle\!\langle \mathbf{h}_1^k\rangle\!\rangle + \sum_{m=1}^3\left(\mathbf{G}_{m,k}^{v,h}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,h}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathbf{Q}_{m,k}^{vv,h}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{v}_0^m\rangle\!\rangle + \mathbf{Q}_{m,k}^{vh,h}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle + \mathbf{Q}_{m,k}^{hh,h}\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle\right)\right), \tag{18.2}$$

$$\{p_1\} = \xi_1^p + \sum_{k=1}^3\left(S_k^{v,p}\langle\!\langle \mathbf{v}_1^k\rangle\!\rangle + S_k^{h,p}\langle\!\langle \mathbf{h}_1^k\rangle\!\rangle + \sum_{m=1}^3\left(G_{m,k}^{v,p}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m} + G_{m,k}^{h,p}\frac{\partial\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m}\right.\right.$$

$$\left.\left. + Q_{m,k}^{vv,p}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{v}_0^m\rangle\!\rangle + Q_{m,k}^{vh,p}\langle\!\langle \mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle + Q_{m,k}^{hh,p}\langle\!\langle \mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle\right)\right), \tag{18.3}$$

где функции $\mathbf{G}$ являются решениями *вспомогательных задач второго типа*:

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{G}^{v,v}_{m,k},\mathbf{G}^{v,h}_{m,k},G^{v,p}_{m,k})=-2\nu\frac{\partial\mathbf{S}^{v,v}_k}{\partial x_m}-\mathbf{V}^k\mathbf{e}_m+\mathbf{V}^m\mathbf{e}_k-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}^{v,v}_k)\mathbf{e}_m$$

$$+\mathbf{V}^m\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_mS^{v,p}_k+(\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}^{v,h}_k)\mathbf{e}_m-\mathbf{H}^m\mathbf{S}^{v,h}_k \tag{19.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{v,v}_{m,k}=-(\mathbf{S}^{v,v}_k)^m, \tag{19.2}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{G}^{v,v}_{m,k},\mathbf{G}^{v,h}_{m,k})=-2\eta\frac{\partial\mathbf{S}^{v,h}_k}{\partial x_m}-\mathbf{e}_m\times\Big(\mathbf{V}\times\mathbf{S}^{v,h}_k+(\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_k)\times\mathbf{H}\Big); \tag{19.3}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{v,h}_{m,k}=-(\mathbf{S}^{v,h}_k)^m, \tag{19.4}$$

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{G}^{h,v}_{m,k},\mathbf{G}^{h,h}_{m,k},G^{h,p}_{m,k})=-2\nu\frac{\partial\mathbf{S}^{h,v}_k}{\partial x_m}+\mathbf{H}^k\mathbf{e}_m-\mathbf{H}^m\mathbf{e}_k-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}^{h,v}_k)\mathbf{e}_m$$

$$+\mathbf{V}^m\mathbf{S}^{h,v}_k+\mathbf{e}_mS^{h,p}_k+(\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}^{h,h}_k)\mathbf{e}_m-\mathbf{H}^m\mathbf{S}^{h,h}_k \tag{20.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{h,v}_{m,k}=-(\mathbf{S}^{h,v}_k)^m, \tag{20.2}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{G}^{h,v}_{m,k},\mathbf{G}^{h,h}_{m,k})=-2\eta\frac{\partial\mathbf{S}^{h,h}_k}{\partial x_m}-\mathbf{e}_m\times\Big(\mathbf{V}\times(\mathbf{S}^{h,h}_k+\mathbf{e}_k)+\mathbf{S}^{h,v}_k\times\mathbf{H}\Big); \tag{20.3}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{h,h}_{m,k}=-(\mathbf{S}^{h,h}_k)^m, \tag{20.4}$$

функции $\mathbf{Q}$ – решениями *вспомогательных задач третьего типа*:

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{Q}^{vv,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{vv,h}_{m,k},Q^{vv,p}_{m,k})=-(\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_k)\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{v,v}_m)-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{v,h}_k)\times\mathbf{S}^{v,h}_m, \tag{21.1}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{Q}^{vv,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{vv,h}_{m,k})=-\nabla_{\mathbf{x}}\times((\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_k)\times\mathbf{S}^{v,h}_m) \tag{21.2}$$

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{Q}^{vh,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{vh,h}_{m,k},Q^{vh,p}_{m,k})=-(\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_k)\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{h,v}_m)-\mathbf{S}^{h,v}_m\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{v,v}_k)$$

$$-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{v,h}_k)\times(\mathbf{S}^{h,h}_m+\mathbf{e}_m)-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{h,h}_m)\times\mathbf{S}^{v,h}_k, \tag{22.1}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{Q}^{vh,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{vh,h}_{m,k})=-\nabla_{\mathbf{x}}\times((\mathbf{S}^{v,v}_k+\mathbf{e}_k)\times(\mathbf{S}^{h,h}_m+\mathbf{e}_m)+\mathbf{S}^{h,v}_m\times\mathbf{S}^{v,h}_k); \tag{22.2}$$

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{Q}^{hh,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{hh,h}_{m,k},Q^{hh,p}_{m,k})=-\mathbf{S}^{h,v}_k\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{h,v}_m)-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{S}^{h,h}_k)\times(\mathbf{S}^{h,h}_m+\mathbf{e}_m), \tag{23.1}$$

$$\mathcal{L}^h(\mathbf{Q}^{hh,v}_{m,k},\mathbf{Q}^{hh,h}_{m,k})=-\nabla_{\mathbf{x}}\times(\mathbf{S}^{h,v}_k\times(\mathbf{S}^{h,h}_m+\mathbf{e}_m)) \tag{23.2}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,\cdot}_{m,k}=0, \tag{24}$$

а функции $\boldsymbol{\xi}_1$ – решениями задач

$$\mathcal{L}^v(\boldsymbol{\xi}^v_1,\boldsymbol{\xi}^h_1,\xi^p_1)=-2\nu(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\boldsymbol{\xi}^v_0-\mathbf{V}\times(\nabla_{\mathbf{X}}\times\boldsymbol{\xi}^v_0)-(\nabla_{\mathbf{X}}\times\boldsymbol{\xi}^h_0)\times\mathbf{H}-\boldsymbol{\xi}^v_0\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{v}_0)$$

$$-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{h}_0)\times\boldsymbol{\xi}^h_0-(\mathbf{v}_0-\boldsymbol{\xi}^v_0)\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\xi}^v_0)-(\nabla_{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\xi}^h_0)\times(\mathbf{h}_0-\boldsymbol{\xi}^h_0)+\nabla_{\mathbf{X}}\xi^p_0, \tag{25.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}^v_1+\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^v_0=0, \tag{25.2}$$

$$\mathcal{L}^h(\boldsymbol{\xi}^v_1,\boldsymbol{\xi}^h_1)=-2\eta(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\boldsymbol{\xi}^h_0-(\mathbf{H}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\boldsymbol{\xi}^v_0+(\mathbf{V}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\boldsymbol{\xi}^h_0-\mathbf{V}\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^h_0+\mathbf{H}\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^v_0,$$

$$-(\boldsymbol{\xi}^h_0\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v}_0+(\boldsymbol{\xi}^v_0\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{h}_0-((\mathbf{h}_0-\boldsymbol{\xi}^h_0)\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}^v_0+((\mathbf{v}_0-\boldsymbol{\xi}^v_0)\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}^h_0, \tag{25.3}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}^h_1+\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^h_0=0. \tag{25.4}$$

Условия (19.2), (19.4), (20.2), (20.4), (25.2), (25.4) и (24) гарантируют выполнение (10.2) при $n = 1$. Взяв дивергенцию уравнений (19.3) и (20.3) и комбинируя полученные равенства с (13.3) и (14.3), соответственно, получаем равенства

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \eta \Delta_{\mathbf{x}}\right) \left(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}^{\cdot,h}_{m,k} + (\mathbf{S}^{\cdot,h}_{k})^{m}\right) = 0,$$

откуда (19.4) и (20.4) выполнены при $t > 0$ тогда и только тогда, когда они выполнены при $t = 0$. Из дивергенций уравнений (21.2), (22.2) и (23.2) находим, что поля $\mathbf{Q}^{h,h}_{m,k}$ соленоидальны при $t > 0$ если и только если они соленоидальны при $t = 0$. Взяв дивергенцию уравнения (25.3) по быстрым переменным, находим, используя равенство $\mathcal{L}^{h}(\boldsymbol{\xi}^{v}_{0}, \boldsymbol{\xi}^{h}_{0}) = 0$ (15),

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \eta \Delta_{\mathbf{x}}\right) (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{h}_{1}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{X}} \times (\boldsymbol{\xi}^{v}_{0} \times \mathbf{H} + \mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}^{h}_{0})\right)$$

$$= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{x}} \times (\boldsymbol{\xi}^{v}_{0} \times \mathbf{H} + \mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}^{h}_{0})\right) = -\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \eta \Delta_{\mathbf{x}}\right) (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{h}_{0}),$$

откуда (25.4) выполнено при $t > 0$ тогда и только тогда, когда оно выполнено при $t = 0$.

В качестве начальных условий для задач (19)-(24) выберем некоторые глобально ограниченные вместе с производными гладкие поля, удовлетворяющие (19.2), (19.4), (20.2), (20.4) и (24), антисимметричные относительно центра (пространственные средние которых следовательно равны нулю). Начальными условиями для $\boldsymbol{\xi}_{1}$ могут служить любые глобально ограниченные вместе с производными гладкие поля, удовлетворяющие (25.2) и (25.4). Интегрируя (25.1) по быстрому времени и усредняя результат с учетом равенств (3), (25.2) и $\langle\!\langle \boldsymbol{\xi}^{v}_{1} \rangle\!\rangle = 0$ (см. (18)), находим

$$\langle \boldsymbol{\xi}^{v}_{1} \rangle|_{t=0} = \Big\langle \int_{0}^{t} \Big(\mathbf{V} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{v}_{0} - \mathbf{H} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\xi}^{h}_{0}$$

$$-\mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\xi}^{v}_{0}) - (\nabla_{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\xi}^{h}_{0}) \times \mathbf{H} + \nabla_{\mathbf{X}} \xi^{p}_{0}\Big)\, dt \Big\rangle;$$

аналогично из (25.4)

$$\langle \boldsymbol{\xi}^{h}_{1} \rangle|_{t=0} = -\Big\langle \int_{0}^{t} \nabla_{\mathbf{X}} \times \Big(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}^{h}_{0} + \boldsymbol{\xi}^{v}_{0} \times \mathbf{H}\Big)\, dt \Big\rangle.$$

Поскольку пространственное среднее каждой суммы по k в (18) равно 0,

$$\langle \mathbf{v}_{1} \rangle = \langle\!\langle \mathbf{v}_{1} \rangle\!\rangle + \langle \boldsymbol{\xi}^{v}_{1} \rangle; \quad \langle \mathbf{h}_{1} \rangle = \langle\!\langle \mathbf{h}_{1} \rangle\!\rangle + \langle \boldsymbol{\xi}^{h}_{1} \rangle.$$

Отсюда, зная $\mathbf{v}_{1}|_{t=0}$ и $\mathbf{h}_{1}|_{t=0}$, находим $\langle\!\langle \mathbf{v}_{1} \rangle\!\rangle|_{T=0}$ и $\langle\!\langle \mathbf{h}_{1} \rangle\!\rangle|_{T=0}$, а затем из (18.1) и (18.2), где $\{\mathbf{v}_{1}\} = \mathbf{v}_{1} - \langle\!\langle \mathbf{v}_{1} \rangle\!\rangle$ и $\{\mathbf{h}_{1}\} = \mathbf{h}_{1} - \langle\!\langle \mathbf{h}_{1} \rangle\!\rangle$, находим начальные условия для задачи (25). Изменение начальных условий для $\mathbf{G}^{\cdot,\cdot}_{m,k}$ и $\mathbf{Q}^{\cdot,\cdot}_{m,k}$ в рассматриваемом классе начальных условий компенсируется соответствующим изменением начальных условий для $\boldsymbol{\xi}^{\cdot}_{1}$, однако, как будет ясно из дальнейшего, эта неоднозначность не влияет на вид уравнений для средних полей, поскольку вызванные этим

изменения полей $\mathbf{G}^{\cdot,\cdot}_{m,k}$ и $\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,\cdot}_{m,k}$ экспоненциально затухают во времени (т.к. они являются решениями задачи (7) с нулевыми пространственными средними), и поэтому не дают вклад в пространственно-временны́е средние, определяющие коэффициенты в новых членах, появляющиеся в уравнениях для средних полей. В случае, если исходное МГД состояние стационарно или периодично по (быстрому) времени, для удобства вычисления пространственно-временны́х средних естественно потребовать, чтобы функции $\mathbf{G}^{\cdot,\cdot}_{m,k}$ и $\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,\cdot}_{m,k}$ были, соответственно, стационарными или периодичными по времени решениями задач (19)-(24). Существование таких стационарных решений рассмотрено Желиговским [2003]; периодический по времени случай рассматривается аналогично (см. Zheligovsky и Podvigina [2005]).

Правые части уравнений (19)-(23) имеют нулевые средние, т.к. исходные МГД состояния симметричны относительно начала координат, а функции $\mathbf{S}^{\cdot,\cdot}_k$ соответствуют центрально-антисимметричным состояниям. В уравнении (4), записанном для вспомогательных задач (19) и (20) второго типа, согласно условиям (19.2), (19.4), (20.2) и (20.4), а также в силу того, что исходные поля $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ имеют симметрию, противоположную симметрии полей $\mathbf{S}^{\cdot,\cdot}_k$, $\langle\!\langle \mathbf{V}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{\cdot,v}_{m,k}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{H}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{G}^{\cdot,h}_{m,k}\rangle\!\rangle = 0$. В уравнении (4), записанном для задачи (25), $\langle\!\langle \mathbf{V}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}^{v}_1\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbf{H}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}^{h}_1\rangle\!\rangle = 0$ согласно условиям (25.2) и (25.4) и поскольку $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\xi}^{\cdot}_0$ экспоненциально затухают во времени. Тем самым для всех рассматриваемых задач (19)-(24) выполнено условие разрешимости (5), и они имеют единственные решения согласно предположению о разрешимости задач (6).

Поскольку пространства центрально-симметричных и центрально-антисимметричных полей инвариантны для оператора $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^v, \mathcal{L}^h)$, решения $\mathbf{G}^{\cdot,\cdot}$ и $\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,\cdot}$ соответствуют центрально-симметричным состояниям:

$$\mathbf{G}^{\cdot,v}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = -\mathbf{G}^{\cdot,v}_{m,k}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{G}^{\cdot,h}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = -\mathbf{G}^{\cdot,h}_{m,k}(\mathbf{x},t),$$
$$G^{\cdot,p}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = G^{\cdot,p}_{m,k}(\mathbf{x},t);$$
$$\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,v}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = -\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,v}_{m,k}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{Q}^{\cdot\cdot,h}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = -\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,h}_{m,k}(\mathbf{x},t),$$
$$Q^{\cdot\cdot,p}_{m,k}(-\mathbf{x},t) = Q^{\cdot\cdot,p}_{m,k}(\mathbf{x},t).$$

Покажем, что решения задачи (25) экспоненциально затухают во времени. (Аналогично доказывается, что экспоненциально затухают во времени изменения функций $\mathbf{G}^{\cdot,\cdot}_{m,k}$ и $\mathbf{Q}^{\cdot\cdot,\cdot}_{m,k}$, вызванные изменениями начальных условий для $\mathbf{S}^{\cdot,\cdot}_k$.) Сделаем подстановку $\boldsymbol{\xi}^v_1 = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{\,v} + \nabla_{\mathbf{x}}\xi^v$, $\boldsymbol{\xi}^h_1 = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{\,h} + \nabla_{\mathbf{x}}\xi^h$, где $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\,v}$ и $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\,h}$ соленоидальны, а ξ – глобально ограниченные вместе с производными гладкие решения уравнений $\Delta_{\mathbf{x}}\xi^v + \nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^v_0 = 0$ и $\Delta_{\mathbf{x}}\xi^h + \nabla_{\mathbf{X}}\cdot\boldsymbol{\xi}^h_0 = 0$, пространственные средние которых равны нулю (они тем самым также экспоненциально затухают во времени). Обозначим $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ правую часть уравнений (25.1), (25.3) после указанной подстановки (зависимость функций от медленных переменных для простоты явно не указываем).

Усредняя уравнение $\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\xi}}\,) = \mathbf{R}$ с учетом (3), получаем

$$-\frac{\partial\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\,\rangle}{\partial t} = \langle\mathbf{R}\rangle \quad\Leftrightarrow\quad -\langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\,\rangle|_{t=t_1} + \langle\hat{\boldsymbol{\xi}}\,\rangle|_{t=0} = \int_0^{t_1}\langle\mathbf{R}\rangle dt.$$

Условие $\langle\!\langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \rangle\!\rangle = 0$ влечет

$$\langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \rangle|_{t=0} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^{t_1} \langle \mathbf{R} \rangle \, dt \, dt_1 \quad \Rightarrow$$

$$\langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \rangle|_{t=t_2} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_{t_2}^{t_1} \langle \mathbf{R} \rangle \, dt \, dt_1 = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_2}^\tau \int_{t_2}^{t_1} \langle \mathbf{R} \rangle \, dt \, dt_1.$$

Используя оценку $|\langle \mathbf{R}(\mathbf{x},t) \rangle| \le c_{\mathbf{R}} e^{-\alpha t} |\mathbf{R}(\mathbf{x},0)| \;\; \forall t \ge 0$, находим отсюда

$$|\langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \, (\mathbf{x}, t_2) \rangle| \le (c_{\mathbf{R}}/\alpha) |\mathbf{R}(\mathbf{x},0)| e^{-\alpha t_2} \;\; \forall t_2 \ge 0.$$

Таким образом, нам осталось показать, что если у решения уравнения $\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{R}$ компоненты $\hat{\boldsymbol{\xi}}^v$ и $\hat{\boldsymbol{\xi}}^h$ соленоидальны, при $t = 0$ их пространственные средние равны нулю, $\langle \mathbf{R} \rangle = 0$, и для нормы $\| \cdot \|$ имеет место оценка

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{x},t)\| \le C_{\mathbf{R}} e^{-\alpha t} \|\mathbf{R}(\mathbf{x},0)\| \; \forall t \ge 0,$$

то $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ экспоненциально затухает в норме $\| \cdot \|$.

В соответствии с нашим предположением об исследуемом МГД состоянии, любое глобально ограниченное решение $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}^v, \boldsymbol{\xi}^h, \xi^p)$ системы уравнений

$$\mathcal{L}^v(\boldsymbol{\xi}^v, \boldsymbol{\xi}^h, \xi^p) = 0, \quad \mathcal{L}^h(\boldsymbol{\xi}^v, \boldsymbol{\xi}^h) = 0, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^v = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^h = 0 \tag{26}$$

с любыми соленоидальными начальными данными с нулевыми средними экспоненциально затухает, т.е. для некоторых констант C и $\alpha > 0$ при любых $t_1 > t_2 \ge 0$ выполнено неравенство

$$\|\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t_1)\| \le C e^{-\alpha(t_1 - t_2)} \|\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t_2)\|. \tag{27}$$

(Без потери общности можно считать, что в (27) такой же показатель экспоненты, как и в оценке для $\|\mathbf{R})\|$.)

Решение рассматриваемой задачи представим в виде суммы $\hat{\boldsymbol{\xi}} \; = \boldsymbol{\xi}_I + \boldsymbol{\xi}_{II}$, где $\boldsymbol{\xi}_I$ – решение задачи (26) с неоднородными начальными данными $\boldsymbol{\xi}_I|_{t=0} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_1(\mathbf{x}, 0)$, а $\boldsymbol{\xi}_{II}$ – решение задачи

$$\mathcal{L}^v(\boldsymbol{\xi}^v_{II}, \boldsymbol{\xi}^h_{II}, \xi^p_{II}) = \mathbf{R}^v(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{L}^h(\boldsymbol{\xi}^v_{II}, \boldsymbol{\xi}^h_{II},) = \mathbf{R}^h(\mathbf{x}, t),$$
$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^v_{II} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}^h_{II} = 0$$

с однородными начальными данными $\boldsymbol{\xi}_{II}|_{t=0} = 0$. Согласно (27)

$$\|\boldsymbol{\xi}_I(\mathbf{x}, t)\| \le C e^{-\alpha t} \|\boldsymbol{\xi}_I(\mathbf{x}, 0)\|. \tag{28}$$

По принципу Дюамеля

$$\boldsymbol{\xi}_{II} = \int_0^t \boldsymbol{\xi}_D(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau,$$

где $\boldsymbol{\xi}_D(\mathbf{x}, t, \tau)$ при $t > \tau$ – решение задачи (26) с начальными данными $\boldsymbol{\xi}_D(\mathbf{x}, t, \tau)|_{t=\tau} = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)$, и, значит, для любого $\alpha' < \alpha$ имеют место оценки

$$\|\boldsymbol{\xi}_D(\mathbf{x}, t)\| \le C e^{-\alpha(t-\tau)} C_{\mathbf{R}} e^{-\alpha\tau} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, 0)\| = C C_{\mathbf{R}} e^{-\alpha t} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, 0)\|$$
$$\Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\xi}_{II}(\mathbf{x}, t)\| \le C C_{\mathbf{R}} t e^{-\alpha t} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, 0)\| \le C_{\alpha'} e^{-\alpha' t} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, 0)\|.$$

Это неравенство совместно с (28) влечет желаемый результат.

6. Уравнения порядка ε^2. Уравнения, полученные из членов рядов (2.1) и (2.2) порядка ε^2, имеют вид

$$\mathcal{L}^v(\{\mathbf{v}_2\},\{\mathbf{h}_2\},\{p_2\})-\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial T}+\nu(2(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\{\mathbf{v}_1\}+\Delta_{\mathbf{X}}\mathbf{v}_0)+\langle\!\langle\mathbf{v}_2\rangle\!\rangle\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{V})$$

$$+(\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{H})\times\langle\!\langle\mathbf{h}_2\rangle\!\rangle+\mathbf{V}\times(\nabla_{\mathbf{X}}\times\mathbf{v}_1)+(\nabla_{\mathbf{X}}\times\mathbf{h}_1)\times\mathbf{H}$$

$$+\mathbf{v}_0\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\{\mathbf{v}_1\})+\mathbf{v}_1\times(\nabla_{\mathbf{x}}\times\{\mathbf{v}_0\})+\mathbf{v}_0\times(\nabla_{\mathbf{X}}\times\mathbf{v}_0)$$

$$+(\nabla_{\mathbf{x}}\times\{\mathbf{h}_0\})\times\mathbf{h}_1+(\nabla_{\mathbf{x}}\times\{\mathbf{h}_1\})\times\mathbf{h}_0+(\nabla_{\mathbf{X}}\times\mathbf{h}_0)\times\mathbf{h}_0-\nabla_{\mathbf{X}}p_1=0,$$

$$\mathcal{L}^h(\{\mathbf{v}_2\},\{\mathbf{h}_2\})-\frac{\partial\mathbf{h}_0}{\partial T}+\eta\,(2(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\{\mathbf{h}_0\}+\Delta_{\mathbf{X}}\mathbf{h}_0)+(\langle\!\langle\mathbf{h}_2\rangle\!\rangle\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}$$

$$-(\langle\!\langle\mathbf{v}_2\rangle\!\rangle\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{H}+\nabla_{\mathbf{X}}\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{H}+\mathbf{V}\times\mathbf{h}_1+\mathbf{v}_0\times\mathbf{h}_0)+\nabla_{\mathbf{x}}\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{h}_0+\mathbf{v}_0\times\mathbf{h}_1)=0.$$

Их средние части (использовано (10) при $n=1,2$)

$$-\frac{\partial}{\partial T}\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle+\nu\nabla^2_{\mathbf{X}}\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial X_j}\Big\langle\,\mathbf{V}^j\{\mathbf{v}_1\}+\mathbf{V}\{\mathbf{v}_1^j\}+\mathbf{v}_0^j\mathbf{v}_0$$

$$-\mathbf{H}^j\{\mathbf{h}_1\}-\mathbf{H}\{\mathbf{h}_1^j\}-\mathbf{h}_0^j\mathbf{h}_0\Big\rangle-\nabla_{\mathbf{X}}p'=0,$$

где $p'(\mathbf{X},T)=\langle\!\langle p_1-(|\mathbf{v}_0|^2-|\mathbf{h}_0|^2)/2-\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{H}\cdot\mathbf{h}_1\rangle\!\rangle$, и

$$-\frac{\partial}{\partial T}\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle+\eta\Delta_{\mathbf{X}}\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle+\nabla_{\mathbf{X}}\times\langle\!\langle\{\mathbf{v}_1\}\times\mathbf{H}+\mathbf{V}\times\{\mathbf{h}_1\}+\mathbf{v}_0\times\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle=0$$

в силу (12) и (18) принимают вид

$$-\frac{\partial}{\partial T}\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle+\nu\Delta_{\mathbf{X}}\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle+\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathbf{D}^{v,v}_{m,k,j}\frac{\partial^2\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_j\partial X_m}+\mathbf{D}^{h,v}_{m,k,j}\frac{\partial^2\langle\!\langle\mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_j\partial X_m}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\mathbf{A}^{vv,v}_{m,k,j}\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{v}_0^m\rangle\!\rangle+\mathbf{A}^{vh,v}_{m,k,j}\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle+\mathbf{A}^{hh,v}_{m,k,j}\langle\!\langle\mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle\right)$$

$$+(\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle-(\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle\cdot\nabla_{\mathbf{X}})\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle-\nabla_{\mathbf{X}}p'=0,\qquad(29.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial T}\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle+\eta\Delta_{\mathbf{X}}\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle+\nabla_{\mathbf{X}}\times\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathbf{D}^{v,h}_{m,k}\frac{\partial\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m}+\mathbf{D}^{h,h}_{m,k}\frac{\partial\langle\!\langle\mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle}{\partial X_m}\right)+\langle\!\langle\mathbf{v}_0\rangle\!\rangle\times\langle\!\langle\mathbf{h}_0\rangle\!\rangle\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathbf{A}^{vv,h}_{m,k}\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{v}_0^m\rangle\!\rangle+\mathbf{A}^{vh,h}_{m,k}\langle\!\langle\mathbf{v}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle+\mathbf{A}^{hh,h}_{m,k}\langle\!\langle\mathbf{h}_0^k\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathbf{h}_0^m\rangle\!\rangle\right)\right)=0.\qquad(29.2)$$

Здесь $\mathbf{D}$ обозначают коэффициенты членов уравнений средних полей, отвечающие т.н. вихревой диффузии, $\mathbf{A}$ – квадратичных членов т.н. вихревой адвекции:

$$\mathbf{D}^{v,v}_{m,k,j}=\langle\!\langle-\mathbf{V}^j\mathbf{G}^{v,v}_{m,k}-\mathbf{V}(\mathbf{G}^{v,v}_{m,k})^j+\mathbf{H}^j\mathbf{G}^{v,h}_{m,k}+\mathbf{H}(\mathbf{G}^{v,h}_{m,k})^j\rangle\!\rangle,\qquad(30.1)$$

$$\mathbf{D}^{h,v}_{m,k,j}=\langle\!\langle-\mathbf{V}^j\mathbf{G}^{h,v}_{m,k}-\mathbf{V}(\mathbf{G}^{h,v}_{m,k})^j+\mathbf{H}^j\mathbf{G}^{h,h}_{m,k}+\mathbf{H}(\mathbf{G}^{h,h}_{m,k})^j\rangle\!\rangle,\qquad(30.2)$$

$$\mathbf{D}^{v,h}_{m,k}=\langle\!\langle\mathbf{V}\times\mathbf{G}^{v,h}_{m,k}-\mathbf{H}\times\mathbf{G}^{v,v}_{m,k}\rangle\!\rangle,\qquad(30.3)$$

$$\mathbf{D}^{h,h}_{m,k} = \langle\!\langle \mathbf{V}\times\mathbf{G}^{h,h}_{m,k} - \mathbf{H}\times\mathbf{G}^{h,v}_{m,k}\rangle\!\rangle \tag{30.4}$$

(коэффициенты (30) идентичны коэффициентам тензора комбинированной вихревой диффузии в задаче о линейной устойчивости МГД стационарных состояний [Желиговский, 2003]),

$$\mathbf{A}^{vv,v}_{m,k,j} = \langle\!\langle -\mathbf{V}^j\mathbf{Q}^{vv,v}_{m,k} - \mathbf{V}(\mathbf{Q}^{vv,v}_{m,k})^j + \mathbf{H}^j\mathbf{Q}^{vv,h}_{m,k} + \mathbf{H}(\mathbf{Q}^{vv,h}_{m,k})^j + (\mathbf{S}^{v,v}_k)^j\mathbf{S}^{v,v}_m - (\mathbf{S}^{v,h}_k)^j\mathbf{S}^{v,h}_m\rangle\!\rangle, \tag{31.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{vh,v}_{m,k,j} = \langle\!\langle &-\mathbf{V}^j\mathbf{Q}^{vh,v}_{m,k} - \mathbf{V}(\mathbf{Q}^{vh,v}_{m,k})^j + \mathbf{H}^j\mathbf{Q}^{vh,h}_{m,k} + \mathbf{H}(\mathbf{Q}^{vh,h}_{m,k})^j \\ &+(\mathbf{S}^{v,v}_k)^j\mathbf{S}^{h,v}_m + (\mathbf{S}^{h,v}_m)^j\mathbf{S}^{v,v}_k - (\mathbf{S}^{v,h}_k)^j\mathbf{S}^{v,h}_m - (\mathbf{S}^{h,h}_m)^j\mathbf{S}^{v,h}_k\rangle\!\rangle,\end{aligned} \tag{31.2}$$

$$\mathbf{A}^{hh,v}_{m,k,j} = \langle\!\langle -\mathbf{V}^j\mathbf{Q}^{hh,v}_{m,k} - \mathbf{V}(\mathbf{Q}^{hh,v}_{m,k})^j + \mathbf{H}^j\mathbf{Q}^{hh,h}_{m,k} + \mathbf{H}(\mathbf{Q}^{hh,h}_{m,k})^j + (\mathbf{S}^{h,v}_k)^j\mathbf{S}^{h,v}_m - (\mathbf{S}^{h,h}_k)^j\mathbf{S}^{h,h}_m\rangle\!\rangle, \tag{31.3}$$

$$\mathbf{A}^{vv,h}_{m,k} = \langle\!\langle \mathbf{V}\times\mathbf{Q}^{vv,h}_{m,k} - \mathbf{H}\times\mathbf{Q}^{vv,v}_{m,k} + \mathbf{S}^{v,v}_k\times\mathbf{S}^{v,h}_m\rangle\!\rangle, \tag{31.4}$$

$$\mathbf{A}^{vh,h}_{m,k} = \langle\!\langle \mathbf{V}\times\mathbf{Q}^{vh,h}_{m,k} - \mathbf{H}\times\mathbf{Q}^{vh,v}_{m,k} + \mathbf{S}^{v,v}_k\times\mathbf{S}^{h,h}_m + \mathbf{S}^{h,v}_m\times\mathbf{S}^{v,h}_k\rangle\!\rangle, \tag{31.5}$$

$$\mathbf{A}^{hh,h}_{m,k} = \langle\!\langle \mathbf{V}\times\mathbf{Q}^{hh,h}_{m,k} - \mathbf{H}\times\mathbf{Q}^{hh,v}_{m,k} + \mathbf{S}^{h,v}_k\times\mathbf{S}^{h,h}_m\rangle\!\rangle. \tag{31.6}$$

7. Вычисление коэффициентов вихревых членов. Для вычисления коэффициентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ в уравнениях (29) достаточно решить 45 вспомогательных задач (6 первого, 18 второго и 21 третьего типа; формально уравнения (21)-(24) определяют 27 задач третьего типа, однако в коэффициенты (30) и (31) поля $\mathbf{Q}^{vv,\cdot}_{m,k}$ и $\mathbf{Q}^{hh,\cdot}_{m,k}$ входят не индивидуально, а в виде сумм $\mathbf{Q}^{vv,\cdot}_{m,k}+\mathbf{Q}^{vv,\cdot}_{k,m}$ и $\mathbf{Q}^{hh,\cdot}_{m,k}+\mathbf{Q}^{hh,\cdot}_{k,m}$, и, соответственно, можно уменьшить число решаемых задач (21) и (23) в обоих случаях на 3, если их при $m\neq k$ переформулировать для этих сумм). Число вспомогательных задач, которые необходимо решить, можно уменьшить втрое, если ввести в рассмотрение (как в работе [Zheligovsky, 2005]) *вспомогательные задачи для сопряженного оператора* (при этом вычислительная сложность решаемых задач не увеличивается):

$$(\mathcal{L}^*)^v(\mathbf{Z}^{v,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{v,h}_{j,n}) = \mathcal{P}(-\mathbf{V}^j\mathbf{e}_n - \mathbf{V}^n\mathbf{e}_j), \tag{32.1}$$

$$(\mathcal{L}^*)^h(\mathbf{Z}^{v,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{v,h}_{j,n}) = \mathcal{P}(\mathbf{H}^j\mathbf{e}_n + \mathbf{H}^n\mathbf{e}_j), \tag{32.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{Z}^{v,v}_{j,n} = \nabla\cdot\mathbf{Z}^{v,h}_{j,n} = 0; \tag{32.3}$$

$$(\mathcal{L}^*)^v(\mathbf{Z}^{h,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{h,h}_{j,n}) = \mathcal{P}(\mathbf{H}\times\mathbf{e}_n), \tag{33.1}$$

$$(\mathcal{L}^*)^h(\mathbf{Z}^{h,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{h,h}_{j,n}) = -\mathcal{P}(\mathbf{V}\times\mathbf{e}_n), \tag{33.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{Z}^{h,v}_{j,n} = \nabla\cdot\mathbf{Z}^{h,h}_{j,n} = 0. \tag{33.3}$$

Здесь $\mathcal{L}^* = ((\mathcal{L}^*)^v,\ (\mathcal{L}^*)^h)$ – оператор, сопряженный к $\mathcal{L}$, формально определенный в пространстве пар трехмерных соленоидальных полей:

$$(\mathcal{L}^*)^v(\mathbf{v},\mathbf{h}) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nu\Delta\mathbf{v} - \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{H}\times(\nabla\times\mathbf{h}) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{V})),$$

$$(\mathcal{L}^*)^h(\mathbf{v},\mathbf{h}) = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} + \eta\Delta\mathbf{h} + \nabla\times(\mathbf{H}\times\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{H}) - \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{h}))$$

(все дифференциальные операторы – в быстрых переменных), $\mathcal{P}$ – оператор проекции трехмерного векторного поля в пространство соленоидальных полей.

Все средние от произведений решений задач (19)-(24) с полями $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$, входящие в (30) и (31), выражаются через решения вспомогательных задач (32) (6 задач) и (33) (3 задачи) и правые части уравнений (19)-(23) равенствами

$$\langle\!\langle -\mathbf{V}^j\mathbf{q}^v - \mathbf{V}(\mathbf{q}^v)^j + \mathbf{H}^j\mathbf{q}^h + \mathbf{H}(\mathbf{q}^h)^j \rangle\!\rangle^n$$
$$= \langle\!\langle -(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{V}^j\mathbf{e}_n - \mathbf{V}^n\mathbf{e}_j)\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^v + (\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{H}^j\mathbf{e}_n - \mathbf{H}^n\mathbf{e}_j)\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^h \rangle\!\rangle$$
$$+\langle\!\langle (\mathcal{L}^*)^v(\mathbf{Z}^{v,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{v,h}_{j,n})\cdot\mathcal{P}\mathbf{q}^v + (\mathcal{L}^*)^h(\mathbf{Z}^{v,v}_{j,n},\mathbf{Z}^{v,h}_{j,n})\cdot\mathcal{P}\mathbf{q}^h \rangle\!\rangle$$
$$= \langle\!\langle -(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{V}^j\mathbf{e}_n - \mathbf{V}^n\mathbf{e}_j)\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^v + (\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{H}^j\mathbf{e}_n - \mathbf{H}^n\mathbf{e}_j)\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^h \rangle\!\rangle$$
$$+\langle\!\langle \mathbf{Z}^{v,v}_{j,n}\cdot\mathcal{L}^v(\mathcal{P}\mathbf{q}^v,\mathcal{P}\mathbf{q}^h) + \mathbf{Z}^{v,h}_{j,n}\cdot\mathcal{L}^h(\mathcal{P}\mathbf{q}^v,\mathcal{P}\mathbf{q}^h) \rangle\!\rangle; \qquad (34)$$

$$\langle\!\langle \mathbf{V}\times\mathbf{q}^h - \mathbf{H}\times\mathbf{q}^v \rangle\!\rangle^n = \langle\!\langle \mathbf{q}^v\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{e}_n) - \mathbf{q}^h\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{e}_n) \rangle\!\rangle$$
$$= \langle\!\langle (\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^v\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{H}\times\mathbf{e}_n) - (\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^h\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{V}\times\mathbf{e}_n) \rangle\!\rangle$$
$$+\langle\!\langle \mathcal{P}\mathbf{q}^v\cdot(\mathcal{L}^*)^v(\mathbf{Z}^{h,v}_n,\mathbf{Z}^{h,h}_n) + \mathcal{P}\mathbf{q}^h\cdot(\mathcal{L}^*)^h(\mathbf{Z}^{h,v}_n,\mathbf{Z}^{h,h}_n) \rangle\!\rangle$$
$$= \langle\!\langle (\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^v\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{H}\times\mathbf{e}_n) - (\mathcal{I}-\mathcal{P})\mathbf{q}^h\cdot(\mathcal{I}-\mathcal{P})(\mathbf{V}\times\mathbf{e}_n) \rangle\!\rangle$$
$$+\langle\!\langle \mathcal{L}^v(\mathcal{P}\mathbf{q}^v,\mathcal{P}\mathbf{q}^h)\cdot\mathbf{Z}^{h,v}_n + \mathcal{L}^h(\mathcal{P}\mathbf{q}^v,\mathcal{P}\mathbf{q}^h)\cdot\mathbf{Z}^{h,h}_n \rangle\!\rangle. \qquad (35)$$

Здесь $\mathcal{I}$ – тождественный оператор, $\mathbf{q}^v, \mathbf{q}^h$ – решение какой-либо из задач (19), (20) при подсчете коэффициентов $\mathbf{D}$ и задач (21)-(24) при подсчете коэффициентов $\mathbf{A}$. Для задач (19) и (20) $\mathcal{P}\mathbf{q}^v, \mathcal{P}\mathbf{q}^h$ вычисляется из соотношений (19.2), (19.4), (20.2) и (20.4), для задач (21)-(24) $\mathcal{P}\mathbf{q}^v = \mathcal{P}\mathbf{q}^h = 0$. (Как обычно, вычисление проекции $\mathcal{P}$ удобно делать с помощью дискретного или непрерывного преобразования Фурье.) Тем самым, решение вспомогательных задач второго и третьего типов оказывается возможным избежать.

Формально сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ определен корректно, например, если исходное состояние $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$ периодично по пространству и стационарно или периодично по времени, и рассматривается область определения оператора $\mathcal{L}^*$, состоящая из функций, имеющих такие же свойства стационарности и/или периодичности. В общем случае численное решение задач (32) и (33) проблематично, т.к. оператор $\mathcal{L}^*$ не параболический. Обойти эту сложность можно следующим образом: для неизвестных полей $\mathbf{Z}^{\cdot,\cdot}$ нулевые “начальные"условия ставим при $t = \tau > 0$, а затем уравнения (32) и (33) решаем по времени “назад", в сторону убывающего t до $t = 0$ (при обращении времени операторы $(\mathcal{L}^*)^v$, $(\mathcal{L}^*)^h$ становятся параболическими). Полученное решение, зависящее от τ, обозначим $\mathbf{Z}^{\cdot,\cdot}(\tau; \mathbf{x}, t)$. Тогда пространственно-временнóе усреднение по быстрым переменным скалярных произведений с функциями $\mathbf{Z}^{\cdot,\cdot}$ в (34) и (35) определяется равенством

$$\langle\!\langle \mathbf{f}\cdot\mathbf{Z}^{\cdot,\cdot} \rangle\!\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\tau\ell^3}\int_0^\tau\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\mathbf{Z}^{\cdot,\cdot}(\tau;\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}\,dt$$

(если указанный предел существует, – например, если исходное состояние $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$ квазипериодично по времени).

8. Выводы. Рассмотрена устойчивость центрально-симметричного МГД состояния, не имеющего больших масштабов, по отношению к возмущению, в котором присутствуют большие пространственные и временны́е масштабы. Построено асимптотическое разложение возмущения и выведены уравнения (29) эволюции в нелинейном режиме главного члена разложения возмущения, усредненного по малым пространственно-временны́м масштабам. Предложен метод экономичного вычисления коэффициентов вихревой диффузии (30) и адвекции (31) в уравнениях для средних полей (29), использующий выражение этих коэффициентов через решения вспомогательных задач для оператора, сопряженного к оператору линеаризации исходной системы уравнений магнитогидродинамики в окрестности МГД состояния, нелинейная устойчивость которого исследуется.

Благодарности. Работа частично финансировалась РФФИ (грант 04-05-64699).

Литература

В.А.Желиговский. О линейной устойчивости стационарных пространственно-периодических магнитогидродинамических систем к длиннопериодным возмущениям // Физика Земли, 2003. *N* 5. С. 65-74 [http://arxiv.org/abs/nlin/0512076].

Baptista M., Gama S., Zheligovsky V. Multiple-scale expansions on incompressible MHD systems. Preprint 2004-11, Centro de Matemática da Universidade do Porto, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto [http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2004-11.pdf].

Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North Holland, 1978.

Cioranescu D., Donato P. An introduction to homogenization. Oxford Univ. Press, 1999.

Gama S., Vergassola M., Frisch U. Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics // J. Fluid Mech., 1994. V. 260, P. 95-126.

Newell A.C., Passot T., Lega J. Order parameter equations for patterns // Ann. Rev. Fluid Mech., 1993. V. 50, P. 399-453.

Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical problems in elasticity and homogenization. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1992.

Zheligovsky V.A., Podvigina O.M., Frisch U. Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 2001. V. 95. P. 227-268 [http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0012005].

Zheligovsky V.A., Podvigina O.M. Generation of multiscale magnetic field by parity-invariant time-periodic flows. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 2003. V. 97. P. 225-248 [http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0207112].

Zheligovsky V.A. Convective plan-form two-scale dynamos in a plane layer. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 2005. V. 99. P. 151-175 [http://arxiv.org/abs/physics/0405045].